Teoria miary i całki
SPPI IIr. semestr zimowy 2006/7
LISTA 7

30/10/06

Zadanie 1
Wykazać, że jeśli $f, g : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ są funkcjami mierzalnymi, to
(a) ich suma i różnica (o ile są dobrze określone) są także funkcjami mierzalnymi,
(b) ich iloczyn jest funkcją mierzalną (stosujemy konwencję: $0 \cdot \infty = 0$).

Zadanie 2
Dowieść, że jeśli $g\colon \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ jest funkcją mierzalną oraz $g(x) \neq 0$ dla $x \in \mathbb{R}$, to funkcja $x \mapsto \frac{1}{g(x)}$ jest mierzalna. Wywnioskować stąd, że iloraz $\frac{f}{g}$ dwóch funkcji mierzalnych $f, g\colon \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ jest mierzalny, o ile $g(x) \neq 0$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 3
Wykazać, że jeśli f jest funkcją mierzalną, to:
(a) $[\,f\,]$ (część całkowita z f) jest funkcją mierzalną,
(b) $\{x\colon |f(x)| < \infty\}$ i $\{x\colon |f(x)| = \infty\}$ są zbiorami mierzalnymi.

Zadanie 4
Wykazać, że każda funkcja monotoniczna $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest borelowska.

Zadanie 5
Wykazać, że każda funkcja mierzalna przyjmująca dwie wartości rzeczywiste jest postaci $f(x) = a\mathbf{1}_A(x) + b$, $(a, b \in \mathbb{R}, A \in \Sigma_X)$.

Zadanie 6
Wykazać, że każda funkcja mierzalna przyjmująca skończenie wiele wartości rzeczywistych jest funkcją prostą.

Zadanie 7
Wykazać, że każda kombinacja liniowa funkcji prostych jest funkcją prostą.

Zadanie 8
Wykazać, że dla każdej funkcji mierzalnej ograniczonej $f : X \to [a, b]$ i dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje funkcja prosta g taka, że dla każdego $x \in X$ mamy $|f(x) - g(x)| < \epsilon$.

Zadanie 9
Na odwrót, jeśli $f : X \to \mathbb{R}$ jest taka, że dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje funkcja prosta mierzalna g spełniająca $|f(x) - g(x)| < \epsilon$ dla każdego $x \in X$, to f jest mierzalna i ograniczona.